DM n°7 : Une preuve du théorème de d'Alembert

À rendre pour le mardi 19 mars

Exercice 1 : Fractions rationnelles

1) Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle :

$$F(X) = \frac{X^2+X-1}{X^4+X^2+1}$$

2) En déduire la limite quand n tend vers $+\infty$ de la suite (S_n) définie par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+k-1}{k^4+k^2+1}$$

Exercice 2 : Une preuve du théorème de d'Alembert-Gauss

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $n \geq 1$. On souhaite montrer que P admet une racine dans $\mathbb{C}$.

1) On considère la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ définie par $f(z) = |P(z)|$.

   (a) Montrer que $f(\mathbb{C})$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée.
   On note alors m la borne inférieure de $f(\mathbb{C})$: $m = \inf_{z\in\mathbb{C}} f(z)$.

   (b) Montrer que $f(z) \xrightarrow[|z|\to+\infty]{} +\infty$. En déduire que : $\exists A > 0 \quad m = \inf_{|z|\leq A} f(z)$.

   (c) En déduire que m est atteint, c'est-à-dire : $\exists z_0 \in \mathbb{C} \quad f(z_0) = m$.

Il suffit à présent de montrer que $P(z_0) = 0$. On raisonne par l'absurde.

2) Supposons que $P(z_0) \neq 0$. On note $Q(X) = \dfrac{P(z_0+X)}{P(z_0)}$.

   (a) Montrer que $\deg Q = n$.
   On peut donc écrire $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ avec $b_0, \cdots, b_n \in \mathbb{C}$ et $b_n \neq 0$.

   (b) Montrer que $b_0 = 1$ et que : $\forall z \in \mathbb{C} \quad |Q(z)| \geq 1$.

   (c) On note $i = \min\{k \in [\![1,n]\!] \mid b_k \neq 0\}$. Justifier que $-\dfrac{1}{b_i}$ admet une racine i-ième dans $\mathbb{C}$.
   On note c une telle racine, puis on pose $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $g(t) = Q(ct)$.

   (d) Montrer que $g(t) = 1 - t^j + \underset{t\to 0}{o}(t^j)$.

   (e) En déduire qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $|g(t)| < 1$. Conclure.